群

维基百科，自由的百科全书

數學群（group）是由一種集合以及一個二元運算所組成的，並且符合“群公理”。群公理包含下述四个性质的代數結構。这四个性质是封闭性、結合律、單位元和对于集合中所有元素存在逆元素。

魔方的所有可能重新排列形成一個群，叫做魔方群。

很多熟知的數學結構比如數系統都遵从群公理，例如整數配備上加法運算就形成一個群。如果将群公理的公式從具体的群和其運算中抽象出來，就使得人们可以用靈活的方式来處理起源于抽象代數或其他许多数学分支的實體，而同时保留對象的本質結構性质。

群在數學內外各個領域中是無處不在的，这使得它們成為當代數學的组成的中心原理。[1][2]

群與对称性有密切的联系。例如，對稱群描述了几何体的对称性：它是保持物體不變的變換的集合。李群应用于粒子物理的标准模型之中；庞加莱群也是李群，能表达狭义相对论中的对称性；点群能帮助理解分子化学中的对称现象。

群的概念产生自多項式方程的研究，由埃瓦里斯特·伽罗瓦在19世纪30年代開創。在得到來自其他領域如數論和幾何学的貢獻之后，群概念在1870年左右形成并牢固建立。現代群論是非常活躍的數學學科，有自己独特的研究方法。[a]為了研究群，數學家發明了各種概念來把群分解成更小的、更好理解的部分，比如子群、商群和單群。除了它們的抽象性質，群论還研究表示群的各種具體方式（群表示论和计算群论）。對有限群已經發展出了特別豐富的理論，這在2004年完成的有限簡單群分類中達到頂峰。从1980年代中叶以来，将有限生成群作为几何对象来研究的几何群论，成为了群论中一个特别活跃的分支。

目录

定義

群$(G,\cdot)$是由集合G和二元運算"·"构成的，符合以下四个性质（称“群公理”）的数学结构。其中，二元运算结合任何兩個元素a和b而形成另一個元素，记為$a\cdot b$，符號"·"是具體的運算，比如整數加法。

群公理所述的四个性质为：[3]

1. 封閉性：	對于所有G中a, b，運算$a \cdot b$的結果也在G中。b[›]
2. 結合律：	對于所有G中的a, b和c，等式 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$成立。
3. 單位元：	存在G中的一個元素e，使得對于所有G中的元素a，总有等式 $e \cdot a = a \cdot e = a$ 成立。
4. 逆元：	對于每個G中的a，存在G中的一個元素b使得总有$a \cdot b = b \cdot a = e$，此处$e$为單位元。

群运算的次序很重要，把元素a與元素b结合，所得到的结果不一定与把元素b與元素a结合相同；亦即，$a \cdot b = b \cdot a$（交换律）不一定恒成立。满足交換律的群称为交换群（阿貝爾群，以尼尔斯·阿贝尔命名），不满足交换律的群称为非交换群（非阿贝尔群）。

整数加法群中，對于任何兩個整數都有 $a + b = b + a$ （加法的交換律）成立，因此，整数加法群是交换群。但是對稱群中交换律并不总是成立，所以一般的对称群不是交换群。

群G的单位元经常记做1或1_G，这个记号来自乘法单位元。对于阿贝尔群，可以把群运算记做+，单位元记做0；这种情况下群称为加法群。单位元也可记做id。

群$(G, \cdot)$也常常简记为G。可以根据上下文来判断一个符号指的是集合还是群。

舉例

例一：整數加法群

最常见的群之一是整數集$\mathbb{Z}$和整数的加法所构成的群。它由以下數列组成：

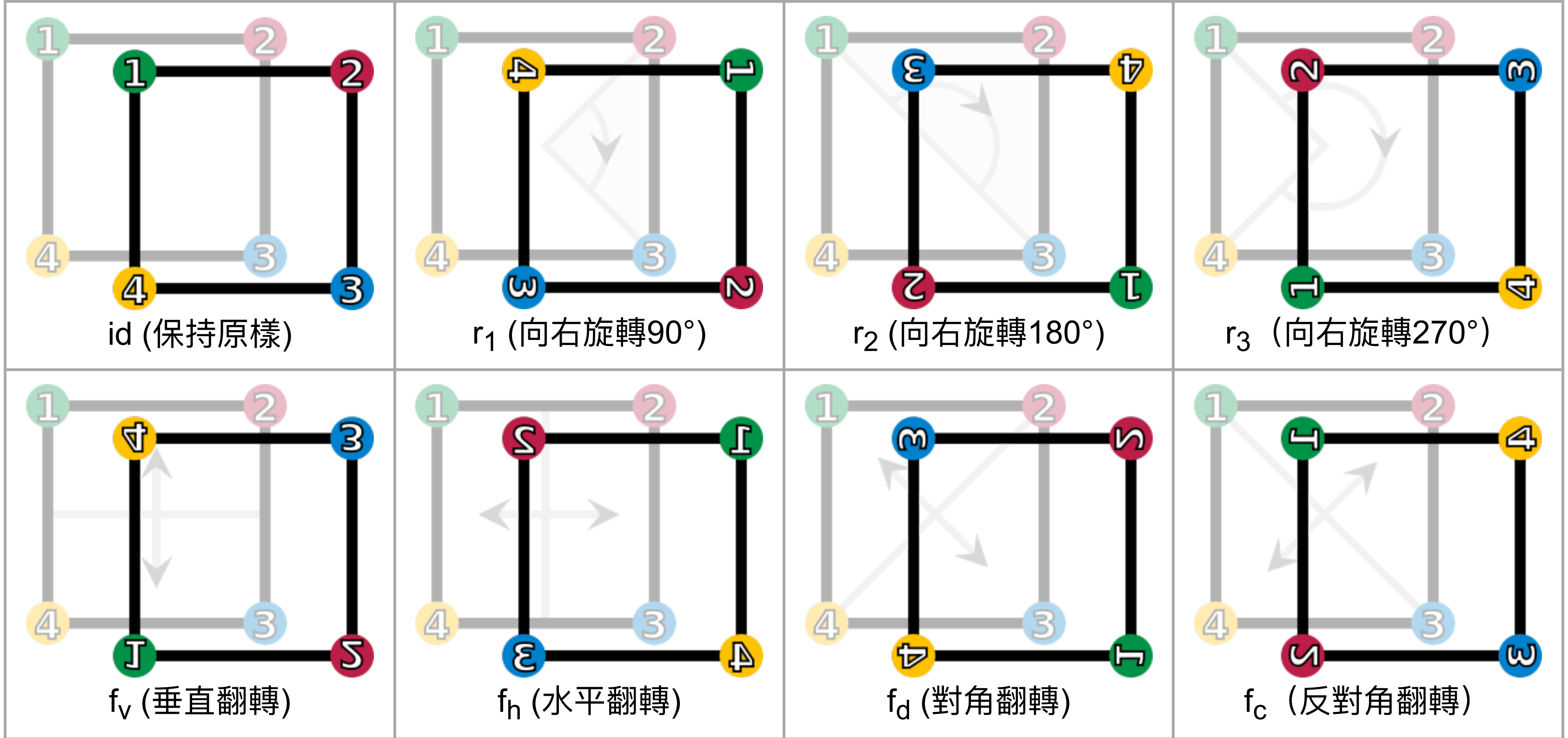
$$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$[4]

下面将整数的加法的性质与四个群公理做对比，可以看出，整数集和整数的加法是可以构成群的。

1. 對于任何兩個整數a和b，它们的和$a + b$也是整數。換句話說，在任何時候，把兩個整數相加都能得出整數的結果。這個性質叫做在加法下封闭。
2. 對于任何整數a, b和c，$(a + b) + c = a + (b + c)$。用話語來表達，先把$a$加到$b$，然后把它們的和加到$c$，所得到的結果与把$a$加到$b$與$c$的和是相等的。這個性質叫做結合律。
3. 如果a是任何整數，那么$0 + a = a + 0 = a$。零叫做加法的單位元，因為把它加到任何整數都得到相同的整數。
4. 對于任何整數a，存在另一個整數b使得$a + b = b + a = 0$。整數b叫做整數a的逆元，记为$-a$。

例二：對稱群

正方形的对称操作（比如旋轉和反射）形成了一個群，叫做二面體群，并记為D_4。[5]二面体群中有下列8个對稱：



正方形對稱群（D_4）的元素。对頂點进行著色和編號只是把這些運算形象化。

- 恒等運算保持所有東西不變，记為id；
- 把正方形向右（順時針）旋轉90°、180°和270°，分别记為r_1、r_2和r_3。
- 關于垂直和水平中線的反射记為f_v和f_h，關于兩個對角線的反射记為f_d和f_c。

任何兩個對稱a和b都可以複合，即进行一個之后再进行另一個。先進行a然后进行b在符號上“從右到左”寫為

$b \cdot a$ （“進行對稱操作a之后再进行對稱操作b”。從右到左的记号来源于函數複合）。 右面的群表列出了這種複合的所有可能結果。例如，右旋270°(r_3)然后水平翻轉（f_h），等于進行一个沿對角線的反射（f_d），如群表中藍色突出的单元格所示。使用上述符號可以记为：

$f_h \cdot r_3 = f_d$

給定這個對稱的集合和描述的運算，群公理可以理解如下：

D$_4$的群表

·	id	r_1	r_2	r_3	f_v	f_h	f_d	f_c
id	id	r_1	r_2	r_3	f_v	f_h	f_d	f_c
r_1	r_1	r_2	r_3	id	f_c	f_d	f_v	f_h
r_2	r_2	r_3	id	r_1	f_h	f_v	f_c	f_d
r_3	r_3	id	r_1	r_2	f_d	f_c	f_h	f_v
f_v	f_v	f_d	f_h	f_c	id	r_2	r_1	r_3
f_h	f_h	f_c	f_v	f_d	r_2	id	r_3	r_1
f_d	f_d	f_h	f_c	f_v	r_3	r_1	id	r_2
f_c	f_c	f_v	f_d	f_h	r_1	r_3	r_2	id

元素id、r_1、r_2和r_3形成一個子群，用紅色突出。這個子群的左和右陪集分别用綠色和黃色突出。

- 閉合公理要求任何兩個對稱a和b的複合

$b \cdot a$ 仍是對稱。另一個群運算的例子是

$r_3 \cdot f_h = f_c$ 就是說在水平翻轉后右旋270°等于沿反對角線翻轉（f_c）。确实，兩個對稱的所有其他組合仍得出一個對稱，這可以使用群表來檢查。

- 結合律的限制處理多於兩個對稱的複合：給定D_4的三個元素a、b和c，有兩種方式計算“a接著b接著c”。

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ 的要求，意味著三個元素的複合與先进行哪个運算是無關的。 例如，$(f_d \cdot f_v) \cdot r_2 = f_d \cdot (f_v \cdot r_2)$ 可以使用右側的群表來檢查

$$(f_d \cdot f_v) \cdot r_2 = r_3 \cdot r_2 = r_1 \text{它等于}$$
$$f_d \cdot (f_v \cdot r_2) = f_d \cdot f_h = r_1$$

- 單位元是保持所有東西不變的對稱id：對于任何對稱a，進行a然后进行id（或进行id然后进行a）等于a，用符號表示為

$id \cdot a = a$

$a \cdot id = a$

- 逆元素撤銷某個其他元素的變換。所有對稱都是可以撤銷的：恒等id，翻轉f_h、f_v、f_d、f_c和180°旋轉r_2這些變換都是自

身的逆元，因為把它們进行兩次就把正方形变回了最初的樣子。旋轉r_3和r_1相互是逆元，因為按一個方向旋轉再按另一個方向旋轉相同角度保持正方形不變。用符號表示為

$f_h \cdot f_h = id$

$r_3 \cdot r_1 = r_1 \cdot r_3 = id$

与上述的整數群不同的是，在整数群中運算次序是無關緊要的，而在D_4中则是重要的： $f_h \cdot r_1 = f_c$ 然而 $r_1 \cdot f_h = f_d$ 。換句話說，D_4不是阿貝爾群，这使得这个群的結構比上面介紹的整數群要更加复杂。

歷史

抽象群的現代概念是從多個數學領域發展出來的。[6][7][8]群論的最初動機是為了求解高於4次的多項式方程。十九世紀法國數學家埃瓦里斯特·伽罗瓦，擴展了保罗·鲁菲尼和约瑟夫·拉格朗日先前的工作，依據特定多項式方程的根（解）的對稱群給出了對它的可解性的判别准则。這個伽罗瓦群的元素對應於根的特定置換。伽罗瓦的想法最初被同代人所拒絕，只在死后才出版。[9][10]更一般的置換群由奧古斯丁·路易·柯西專門研究。阿瑟·凱萊的《On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$》（1854年）給出有限群的第一個抽象定義。[11]

幾何是第二個系统性的使用群，特别是對稱群的領域。这类群是菲利克斯·克莱因1872年的爱尔兰根纲领的一部分。[12]在新型的幾何如雙曲幾何和射影幾何形成之后，克萊因利用群論以更連貫的方式來組織它們。索菲斯·李進一步發展了這些想法，在1884年創立了李群的研究。[13]

对群論有貢獻的第三個領域是數論。一些阿貝爾群結構在卡爾·弗里德里希·高斯的數論著作《算术研究》（1798年）中被隐含地用到，并被利奥波德·克罗内克更明顯地用到。[14]1847年，恩斯特·库默尔發展了描述用素数做因數分解的理想類群，使證明費馬大定理的早期嘗試達到了高潮。[15]

把上述各種來源融合成一个群的統一理論是从卡米尔·若尔当的《Traité des substitutions et des équations algébriques》（1870年）開始的。[16]瓦尔特·冯·迪克（1882年）給出了第一个抽象群的現代定義的陳述。[17]在二十世紀，群在费迪南德·格奥尔格·弗罗贝尼乌斯和威廉·伯恩赛德的开拓性著作中獲得了廣泛的认识，他們研究有限群的表示理論，還有理查德·布劳尔的模表示論和Issai Schur的論文。[18]赫尔曼·韦伊、埃利·嘉当和很多其他人推進了李群和更一般的局部緊群的理論。[19]它的代數對應者——代數群的理論，由克劳德·舍瓦莱（從1930年代晚期开始）和后來阿尔曼德·波莱尔和雅克·蒂茨的重要著作奠基。[20]

芝加哥大学于1960-61年举办的“群论年”活动促使群论家们以丹尼尔·格伦斯坦，约翰·格里格斯·汤普森和瓦爾特·法伊特为基础展开合作。在大量其他数学家的帮助下，他们完成了有限单群的分类。这项工程，不论是从证明长度来说还是从参与人数来说，其浩大程度超越了之前一切的数学成果。简化此证明的研究还在进行中。[21]群论在当下仍是一个活跃的数学分支，并仍在对其他分支产生重大影响。a[›]

群公理的簡單結論

可以從群公理直接獲得的關于所有群的基本事實，通常包含在初等群論中。[22]例如，重復應用結合律公理，可以證明以下等式

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

可以推廣到多於三個因子。因為這意味着括號可以插入到一序列的項的任何地方，所以通常省略括號。[23]

公理可以弱化為只宣称左單位元和左逆元的存在性。二者可以被證明實際上是双側的，所以得出的定義与上面給出的等價。[24]

單位元和逆元的唯一性

群公理的兩個重要結果是單位元和逆元的唯一性。在群中只能有一個單位元，而群中的每個元素都正好有一個逆元素。[25]

要證明a的逆元素的唯一性，假設a有兩個逆元，记為l和r。則

$l = l \cdot e$	由于e是單位元
$= l \cdot (a \cdot r)$	因為r是a的逆元，所以$e = a \cdot r$
$= (l \cdot a) \cdot r$	根据結合律，它允許重新安排括號
$= e \cdot r$	由于l是a的逆元，就是說$l \cdot a = e$
$= r$	由于e是單位元

因此l和r被一系列等式連接了起來，所以它們是相等的。換句話說a只有一個逆元。

除法

在群中，可以進行除法：給定群G的元素a和b，G中存在方程 $x \cdot a = b$ 的唯一解x。[25]实际上，把方程右乘以a^{-1}給出解 $x = x \cdot a \cdot a^{-1} = b \cdot a^{-1}$ 。類似地，G中存在方程 $a \cdot y = b$ 的唯一解y，也就是 $y = a^{-1} \cdot b$ 。一般地說，x和y不一定相等。

这一结果的一个推论是“乘以某个群中的元素g”是一个双射。特别地，如果g是群G的一个元素，则有G到自身的双射，（称为由$\boldsymbol{g}$引起的左平移）它将$h \in G$映射为$g \cdot h$。类似地，由$\boldsymbol{g}$引起的右平移是一个G到自身的双射，它将$h \in G$映射为$h \cdot g$。如果G是阿贝尔群，由同一个元素引起的左平移和右平移是相同的。

基本概念

> 下列章節使用了數學符號如$X = \{ x, y, z \}$來表示集合X包含元素x、y和z，或$x \in X$來表示x是X的一個元素。记法$f : X \to Y$意味著f是对X的所有元素指定Y的一個元素的函數。

要超越上述純粹符號操作水平去理解群，必須采用更加結構性的概念。c[›]有一個概念性原理位于所有下列概念的底層：要发挥群提供的結構（而無結構的集合就沒有）的优势，與群有關的構造必須与群運算*兼容*。下列概念中以各種方式表现了這種兼容性。例如，群可以通過叫做群同態的函數相互關聯。根據上述這個原理，要求它們以精確的意义照顧到群結構。群的結構還可以通過把它們分解成子群和商群來理解。“保持結構”的原理是在數學中反復出現的一個主題，它是靠范疇來工作的一個實例，在這里的情况下靠群范疇。[26]

群同態

群同態g[›]是保持群結構的函數。兩個群之間的函數 $a: G \to H$ 是同態，如果等式

$a(g \cdot k) = a(g) \cdot a(k)$ 對于所有G中的元素g、k都成立，就是說在进行映射a之后還是之前進行群運算所得到的結果是一樣的。這個要求保证了 $a(e_G) = e_H$ ，以及對于G中的所有g，都有 $a(g)^{-1} = a(g^{-1})$ 。因此群同態保持了群公理提供的G的所有結構。[27]

兩個群G和H被稱為同構的，如果存在群同態 $a: G \to H$ 和 $b: H \to G$ ，使得先后（以兩種可能的次序中每個次序）應用兩個函數分別等于G和H的恒等函數。就是說，對于任何G中的g和H中h，有 $a(b(h)) = h$ 和 $b(a(g)) = g$ 。從抽象的觀點來看，同構的群携带了相同的信息。例如，证明對於G的某個元素g有 $g \cdot g = e_G$ ，等價於证明 $a(g) \cdot a(g) = e_H$ ，因為應用a於第一個等式得到第二個，而應用b於第二個得到第一個。

子群

非正式的說，子群是包含在更大的群G內的一個群H。[28]具體的說，G的單位元包含在H中，并且只要h_1和h_2在H中，則$h_1 \cdot h_2$和${h_1}^{-1}$也在其中，所以H的元素对于限制於H的G上的群運算确实形成了一个群。

在上面例子中，單位元和旋轉構成了一個子群 $R = \{\mathrm{id}, \mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3\}$ ，在上面的群表中突出為紅色：任何兩個復合的旋轉仍是一個旋轉，并且旋轉可以被相反方向上的旋轉（它的逆元）所抵消。子群检验法是群G的子集H是子群的充分必要條件：對于所有元素 $g, h \in H$ ，只需檢查$g^{-1}h \in H$。了解子群族對于作為一個整體來理解群是重要的。d[›]

給定群G的任何子集S，由S所生成的子群是由S的元素和它們的逆元的乘積组成。它是包含S的G的最小子群。[29]在上面介紹例子中，r_2和f_v所生成的子群由這兩個元素本身、單位元id和 $f_h = f_v \cdot r_2$ 構成。這還是個群，因為结合這四個元素或它們的逆元（在這個特殊情況下，是这些相同的元素）中任何兩個仍得到這個子群中的元素。

陪集

在很多情況下，需要認為兩個群元素是等同的，如果它們只差一個給定子群中的元素。例如，在上述D_4中，一旦進行了翻轉，只进行旋轉運算（不再进行翻轉）正方形就永遠不能回到r_2的构型，就是說旋轉運算對于是否已經進行了翻轉的問題是無關緊要的。陪集可用來把這種现象形式化：子群H定義了左陪集和右陪集，它們可以認為是把H平移了一个任意群元素g。用符號表示，H的包含g的左和右陪集分別是

$$gH = \{gh,\ h \in H\}\text{和}Hg = \{hg,\ h \in H\}\text{。}$$ [30]

任何子群H的陪集形成了G的一个劃分；就是說所有左陪集的并集与G相等，而且兩個陪集要么相等，要么有空的交集。[31]第一種情況 $g_1H = g_2H$ 出現當且僅當$g_1^{-1}g_2 \in H$，就是說如果這兩個元素差異了H的一個元素。類似的考慮也適用於H的右陪集。H的左和右陪集可以相等也可以不相等。如果它們相等，就是說對于所有G中的g有$gH = Hg$，則H被稱為正規子群。

在前面介绍的對稱群D_4中，由旋轉構成的子群R的左陪集gR要么等于R，如果g是R自身的一個元素；要么等于$U = f_vR = \{f_v, f_d, f_h, f_c\}$（用綠色突出）。子群$R$還是正規的，因為 $f_vR = U = Rf_v$ 且對于任何f_v以外的元素也是類似的。

商群

有时在由陪集形成的集合上可以赋予一个满足群公理的运算而使之成為*商群*或*因子群*。这仅在子群是正规的时候才可行。給定任何正規子群N，商群定義為

$$G\ /\ N = \{gN,\ g \in G\}\text{，“}G\text{模}N\text{”}$$ [32]

這個集合從最初的群G繼承了一個群運算（有時叫做陪集乘法或陪集加法）：對于所有G中的g和h，$(gN)\cdot(hN) = (gh)N$。這個定義是由關聯任何元素g到它的陪集gN的映射$G \to G\ /\ N$是群同態的想法（自身是上面提出的一般結構性考慮的一個實例）所激發的，或者是叫做泛性質的一般抽象考慮。陪集 $eN = N$ 充當了這個群的單位元，在商群中gN的逆元是 $(gN)^{-1} = (g^{-1})N$。e[›]

商群$D_4\ /\ R$的元素是代表單位元的R自身和 $U = f_vR$。商群上的群運算如右側所示。例如，$U \cdot U = f_vR \cdot f_vR = (f_v \cdot f_v)R = R$。子群 $R = \{id, r_1, r_2, r_3\}$ 和對應的商群都是阿貝爾群，而D_4不是阿貝爾群。通過较小的群构造较大的群，例如從子群R和商群$D_4\ /\ R$构造D_4，被抽象為叫做半直積的概念。

·	**R**	**U**
R	*R*	*U*
U	*U*	*R*

商群$D_4\ /\ R$的群表。

商群和子群一起形成了用它的展示描述所有群的一種方法：任何群都是這個群的生成元上的自由群模以“關係”子群得到的商群。例如，二面體群D_4可以由兩個元素r和f生成（比如$r = r_1$右旋，和$f = f_v$垂直）或任何其他）翻轉），這意味著正方形的所有對稱都是這兩個對稱或它們的逆元的有限復合。与關係在一起

$$r^4 = f^2 = (rf)^2 = 1,$$ [33]

這個群就完全描述出來了。群的展示還可以被用來構造凱萊圖，它是一种利用图形来辅助理解离散群的工具。

子群和商群以下列方式相互關聯：G的子集H可以被看作單射$H \to G$，就是說任何目標元素都有最多一個映射到它的元素。單射的對立是滿射（所有目標的元素都被映射到了），比如規范映射$G \to G\ /\ N$。y[›]通过這些同態理解子群和商群強調了這些定義中內在的結構性概念。一般的說，同態既不是單射也不是滿射。群同態的核與像和第一同構定理研究這個現象。

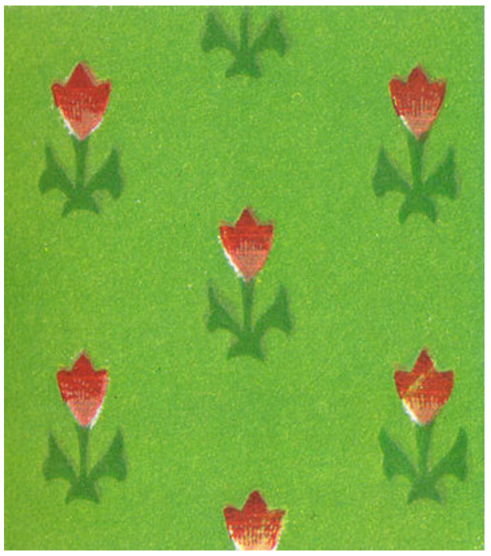
共軛

如果同一個群中的兩個元素p和q 滿足關係：$p = x^{-1}qx$，其中x也是同一個群中的元素，則稱元素p和q 共軛。共軛关系是一个等价关系，即它满足三个性质：共軛是自反的、对称的和傳遞的。

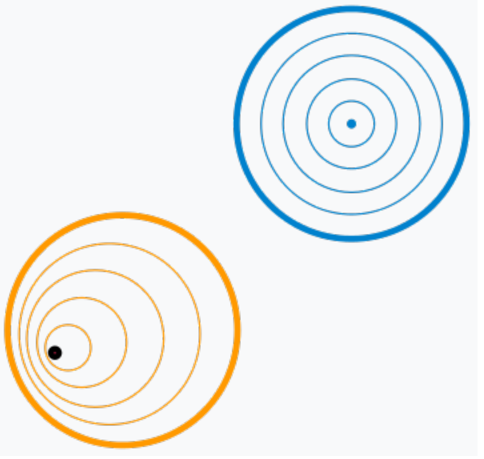
在群中可以找到一個集合，這個集合中每一個元素都相互共軛，而在這個集合以外群的其他部分已經沒有任何元素與他們具有共軛關係了。稱这种集合為群中的一個共軛類。同一個群的兩個類之間一定沒有共同的元素。群中一個元素一定屬於且僅屬於一個類。如果群中沒有元素與該元素共軛，則該元素自成一類。

例子和應用

群的例子和應用大量存在。起點是上面介紹過的整數的群**Z**帶有加法作為群運算。如果把加法替代為乘法，就得到了乘法群。這些群是抽象代數中重要概念的前身。



周期性壁紙引發壁紙群。



平面減去一個（粗體）點的基本群由在這個區域內的環路構成。

群應用於很多數學領域中。數學對象的性质經常是通過将群關聯与数学对象关联，并研究相應的群的性質来研究的。例如，儒勒·昂利·庞加莱通過引入基本群創立了現在所謂的代數拓撲。[34]通過這種連接方式，拓撲性質比如臨近和連續轉換成了群的性質。i[›]例如，右側的圖像描繪了平面減去一個點的基本群的元素。這個群的元素給出為在這個區域內的環路。藍色環路被認為是零同倫（因此是無關緊要的），因為它可以收縮為一個點。圓孔的存在防止了橙色環路被收縮。橙色環路（或任何環繞這個圓孔一次的其他環路）所生成的，去掉了一個點的平面的基本群是無限循環群。基本群以這種方式探測到了這個圓孔。

在更新近的應用中，影響已經被倒轉過來，由群論背景來激發幾何結構了。j[›]在類似的脈絡下，幾何群論采用了幾何概念，比如在雙曲群的研究中。[35]其他一些大量应用群论的数学分支包括代數幾何和數論。例如，典型群和Picard群在代数几何上有重要应用；參見[36]

除了上述理論應用之外，還存在很多群的實踐應用。密碼學依賴於抽象群論方式和從計算群論中特別是實現于有限群上的時候所得到的算法知識的結合。[37]群論的應用不限於數學；科學如物理、化學和計算機科學都受益於這個概念。

數

很多數系統，比如整數和有理數享有自然給予的群結構。在某些情况下比如對于有理數，加法和乘法運算二者都引發群結構。這種系統是叫做環和域的更一般的代數結構的前身。

整數

整數**Z**在加法下的群记為（**Z**, +），它在上面已經描述了。整數帶有用乘法替代加法的運算，(**Z**, ·)不形成群。閉合、結合律和單位元公理滿足，但逆元不存在：例如，$a = 2$ 是整數，但方程 $a·b = 1$ 的唯一解在這種情況下是$b = 1/2$，它是有理數而非整數。因此不是所有**Z**的元素都有（乘法）逆元。k[›]

有理數

對乘法逆元存在的要求建议了考慮分式

$$\frac{a}{b}。$$

整數的分式（要求b非零）叫做有理數。l[›]所有這種分數的集合通常記為**Q**。對于有理數帶有乘法(**Q**,·),成為群仍有一個小障礙：因為有理數0沒有乘法逆元（就是說沒有x使得 $x·0 = 1$），(**Q**, ·)仍然不是群。

但是，所有非零有理數的集合 $\mathbf{Q}\backslash\{0\} = \{q \in \mathbf{Q}, q \neq 0\}$ 形成一個在乘法下的阿貝爾群，記為$(\mathbf{Q}\backslash\{0\},\cdot)$。m[›]結合律和單位元公理從整數的性質中得出。閉合要求在去掉零之后仍成立，因為任何兩個非零有理數的乘積永遠不是零。最后，a/b的逆元是b/a，所以逆元公理也滿足。

有理數（包括0）在加法下也形成群。同時帶有加法和乘法運算產生更復雜的結構叫做環—如果同时除法总是可能的話（如在$\mathbf{Q}$中）就是域，它在抽象代數中占據中心位置。群論理論因此位于這些實體的理論的底層部分。n[›]

非零整數模以素數

對于任何素數p，模算術提供了整數模以p的乘法群。[38]群的元素是不能被p整除的整數模p的同余类，就是說兩個數被認為是等價的如果它們的差被p整除。例如，如果 $p = 5$ ，則精確地有四個群元素1, 2, 3, 4:排除了5的倍數而6和−4都等價于1。群運算給出為乘法。因此 $4 \cdot 4 = 1$ ，因為通常意义下的乘積16等價於1,而5整除 $16 - 1 = 15$ 。以上事实記為

$$16 \equiv 1 \pmod 5 。$$

p的首要作用是確保了兩個都不被p整除的整數的乘積也不被p整除，因此指示的同馀類的集合在乘法下閉合。o[›]單位元如平常的乘法群一樣是1，而結合律可以從整數的相應性質得出。最后，逆元公理要求給定不整除于p的整數a，存在一個整數b使得

$$a \cdot b \equiv 1 \pmod p ，就是說p整除a \cdot b - 1的差。$$

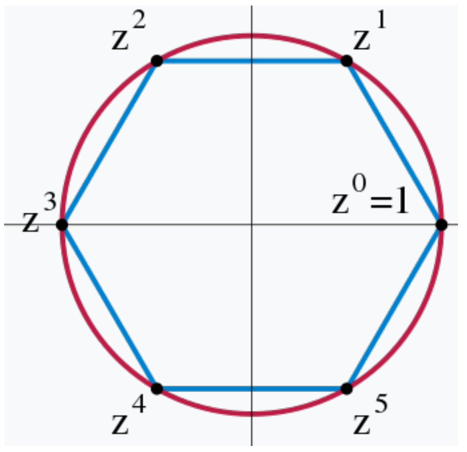
逆元b可以使用貝祖等式和最大公約數$\gcd(a, p)$等于1的事實找到。[39]在上述 $p = 5$ 的情況下，4的逆元是4，3的逆元是2，因為 $3 \cdot 2 = 6 \equiv 1 \pmod 5$ 。所有的群公理都滿足。實際上，這個例子類似于上述（$\mathbf{Q}\backslash\{0\},\cdot$），因為它是在有限域$\mathbf{F}_p$中非零元素的乘法群，記為$\mathbf{F}_p^\times$。[40]這些群對于公开密钥加密是至關重要的。p[›]

循環群

*循環群*是其所有元素都是特定元素a的冪的群（在群運算被寫為加法的時候使用術語倍數）。[41]在乘法符號下，群的元素是:

$$\ldots, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0 = e, a, a^2, a^3, \ldots,$$

這里的a^2意味著$a \cdot a$，而a^{-3}表示$a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot a^{-1} = (a \cdot a \cdot a)^{-1}$等等。h[›]這個元素$a$叫做這個群的生成元或本原元。



單位一的六次複數根形成一個循環群。z是本原元而z^2不是，因為z的奇數冪不是z^2的冪。

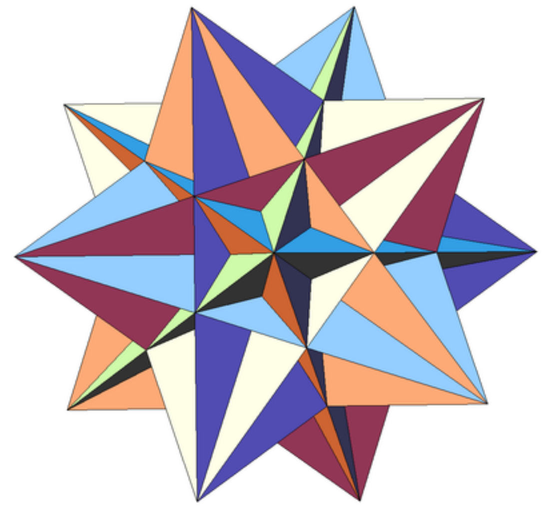
這類群的典型例子是單位一的n次複數根，由滿足 $z^n = 1$ 的複數z給出，其運算為乘法。[42]任何有n個元素的循環群同構於這個群。使用某些域論，群$\mathbf{F}_p^\times$可以被證明為是循環群：對于 $p = 5$, 3是生成元因為 $3^1 = 3, 3^2 = 9 \equiv 4, 3^3 \equiv 2$, 而 $3^4 \equiv 1$ 。無限循環群同構於（$\mathbf{Z}, +$），它是前面介紹的整數在加法下的群。[43]因為這兩個原型都是阿貝爾群，所以任何循環群都是。

阿貝爾群包括有限生成阿貝爾群的基本定理的研究是非常成熟的；對這個事態的反映是很多有關群論的概念，比如中心和交換子，描述了一個給定群不是阿貝爾群的程度。[44]

對稱群

*對稱群*是由給定數學對象的對稱組成的群，對稱源于它們的幾何本性（比如前面介紹的正方形的對稱群）或源于代數本性（比如多項式方程和它们的解）。[45]概念上說，群論可以被認為是對稱性的研究。t[›] 數學中的對稱性極大的簡化了幾何或分析對象的研究。群被稱為作用於另一個數學對象X上，如果所有群元素進行某個在X上的運算兼容於群定律。在下面最右側例子中，7階的（2,3,7）三角群的一個元素通過置換突出的彎曲的三角形作用在鑲嵌上（其他的元素也是）。通過群作用，群模式被連接到了所作用到的對象的結構上。

在化學領域中，比如晶體學、空間群和點群描述分子對稱性和晶體對稱性。這些對稱性位于這些系統的化學和物理表現的底層，而群論使簡化對這些性質的量子力學分析成為可能。[46]例如，群論被用來證實在特定量子級別間不出現光學躍遷簡單的因為涉及到了狀態的對稱性。

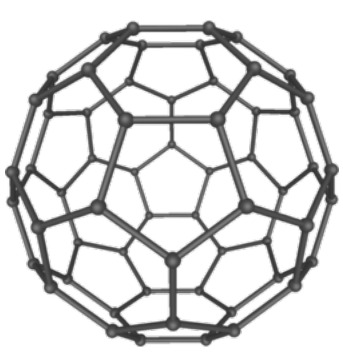
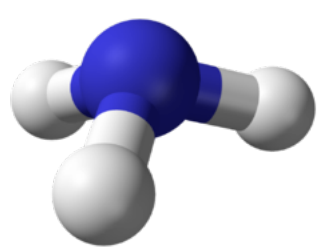
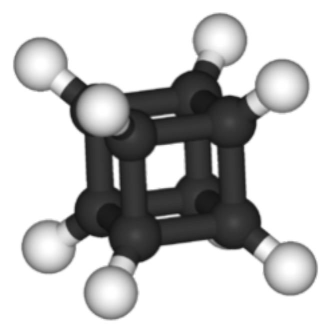
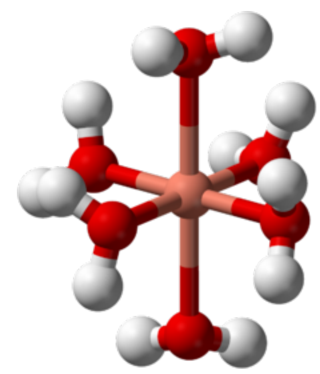
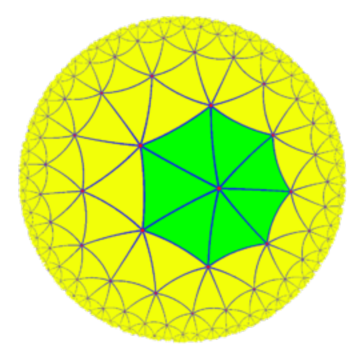


旋轉和翻轉形成一個大二十面體的對稱群。

群不只對評定在分子中蘊含的對稱性有用，而且令人驚奇的它們還可以預測出分子的對稱性有时候可以改变。姜-泰勒效应是高對稱的分子的變形，此時，在通過分子的對稱運算相互關聯的一組可能基態中，该分子将采纳一個特定的低對稱的基態。[47][48]

同樣的，群論還可以幫助預測在物質經歷相變的時候出現的物理性質的變更，比如晶體形式從立方體變為四面體。一個例子是鐵電物質，這裡從順電到鐵電狀態的變更出現在居里溫度時，與從高對稱順電狀態到低對稱鐵電狀態的變更有關，并伴隨著所謂的軟聲子模式，它是在變化時轉到零頻率的振動晶格模式。[49]

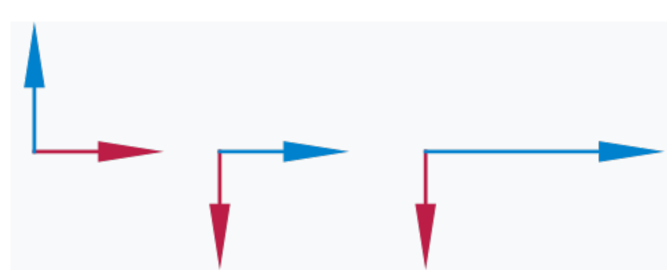
這種自發對稱性破缺在基本粒子物理中找到了進一步應用，這里它的出現与戈德斯通玻色子的出現有关。

				
富勒烯展现了二十面體對稱。	氨NH_3。它的對稱群是6階的，用120°旋轉和反射生成的。	立方烷C_8H_8刻畫了八面體對稱。	六水合銅（II）配合物$[Cu(OH_2)_6]^{2+}$。相較于完美的對稱形狀，分子垂直膨脹大約22%（姜-泰勒效应）。	（2,3,7）三角群是雙曲群，它作用在這個雙曲面的鑲嵌上。

有限對稱群比如马蒂厄群被用于編碼理論中，它又用于傳輸數據的糾錯和CD播放器中。[50]另一個應用是微分伽羅瓦理論，它刻畫有已知形式的不定積分的函數，給出何時特定微分方程的解有良好表現的群論判定標準。u[›]在群作用下保持穩定的幾何性質在幾何不變量理論中研究。[51]

一般線性群和表示理論

矩陣群由矩陣加上矩陣乘法一起構成。一般線性群 $GL(n, \mathbf{R})$ 由所有可逆的n乘n的帶有實數元素的矩陣構成。[52]它的子群被稱為矩陣群或線性群。上面提及的二面體群例子可以被看作（非常小的）矩陣群。另一個重要矩陣群是特殊正交群$SO(n)$。它描述了n維的所有可能旋轉。通過歐拉角，旋轉矩陣被用于計算機圖形學中。[53]



兩個向量（左側展示），和它們乘以矩陣之后（中間和右側展示）。中間的表示了順時針旋轉90°，而右側的再按因子2伸縮了x坐標。

表示理論是對群概念的應用并且對深入理解群是很重要的。[54][55]它通過群作用於其他空間來研究群。一類廣泛的群表示是線性表示，就是說群作用在線性空間中，比如三維歐幾里得空間$\mathbf{R}^3$。G在n-維實向量空間上的表示簡單的是從群到一般線性群的群同態

$$\rho\colon G \to GL(n, \mathrm{R})。$$

以這種方式，抽象給出的群運算被轉換成用明確的計算可觸及到的矩陣乘法。w[›]

給定一個群作用，這給出了研究所作用的對象的進一步方法。x[›]在另一方面，它還產生了關于群的信息。群表示是在有限群、李群、代數群和拓撲群特別是（局部）緊群理論中的起組織作用的原則。[54][56]

伽羅瓦群

*伽羅瓦群*是通过对求解多項式方程的过程中涉及到的对称性的研究而被发展起来的。[57][58]例如，二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解給出為

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}。$$

對換表達式中的"+"和"−"，也就是置換方程的兩個解可以被看作（非常簡單的）群運算。類似的公式對於三次方程和四次方程也有，但是對於五次方程和更高次的方程就不普遍性的存在。[59]与多項式相关联的伽羅瓦群的抽象性質（特別是它們的可解性）給出了那些多項式的所有解都可用根式表達的判定標準，就是說這些解可以類似上面公式那樣只使用加法、乘法和方根來表達。[60]

這個問題可以使用域論來處理：考慮一個多項式的分裂域就把問題轉移到了域論的領域中了。現代伽羅瓦理論把上述類型的伽羅瓦群推廣到了域擴張，并通過伽羅瓦理論基本定理建立了在域和群之間的嚴格關聯，再次凸顯了群在數學中無所不在。

有限群

一個群被稱為有限群，如果它有有限個元素。元素的數目叫做群G的階。[61]一類重要的有限群是n次对称群S_N，它是N個字母的置換的群。例如，在3個字母上的n次对称群S_3是由三個字母ABC的所有可能置換構成的群，就是說它包含元素ABC, ACB, ...,直到CBA，總共有6（或3的階乘）個元素。這類群是基礎性的，因為任何有限群都可以表達為n次对称群S_N在適合的整數N下的子群（凱萊定理）。相似於上述正方形的對稱的群，S_3還可以解釋為等邊三角形的對稱的群。

在群G中的一個元素a的階是最小的使得$a^n = e$的正整數n，這里的 a^n表示$\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$，就是應用運算·於$a$的$n$個復本上。（如果·代表乘法則$a^n$對應於$a$的$n$次冪）。在無限群中，這個$n$可能不存在，在這種情況下$a$的階被稱為無限的。一個元素的階等于這個元素生成的循環子群的階。

更復雜的計數技術例如計數陪集，產生關于有限群的更精確陳述：拉格朗日定理聲稱有限群G的任何有限子群H的階整除G的階。西羅定理證明了它的部分逆命題。

上面討論的二面體群是8階有限群。r_1的階為4，這是它生成的子群R（見上）的階。反射元素f_v等的階是2。如拉格朗日定理所述這兩個階都整除8。上面的群$\mathbf{F}_p^{\times}$有階$p - 1$。

有限单群分类

数学家们常常为寻求一种数学对象的完备分类（或列表）而努力。在有限群的领域内，这个目标迅速引出了一系列困难而意义深远的数学问题。根据拉格朗日定理，p阶有限群（p为素数）必定是循环（阿贝尔）群$\mathbf{Z}_p$。p^2阶群也被证明是阿贝尔群。但这一命题并不能推广到p^3阶群，如上面的非阿贝尔群——8阶二面体群D_4所示，其中$8 = 2^3$。[62]可以利用计算机代数系统来给较小的群列表，但没有对一切有限群的分类。q[›]一个中间步骤是有限单群分类。r[›]如果一个非平凡群仅有的正规子群是平凡群和它自身，那么这个群叫做一个单群或简单群。s[›]若尔当-赫尔德定理说明单群可以作为建构有限群的“砖块”。[63]有限单群列表是当代群论的一个主要成就。1998年的菲尔兹奖得主理查·伯切德斯成功地证明了所谓怪兽-胡言乱语猜想。该猜想指出了最大有限简单散在群——“怪兽群”与一种来自经典复分析和弦理论（一种被认为统一了对许多物理学现象的描述的理论）的对象模函数之间的惊人而深刻的联系。[64]

帶有額外結構的群

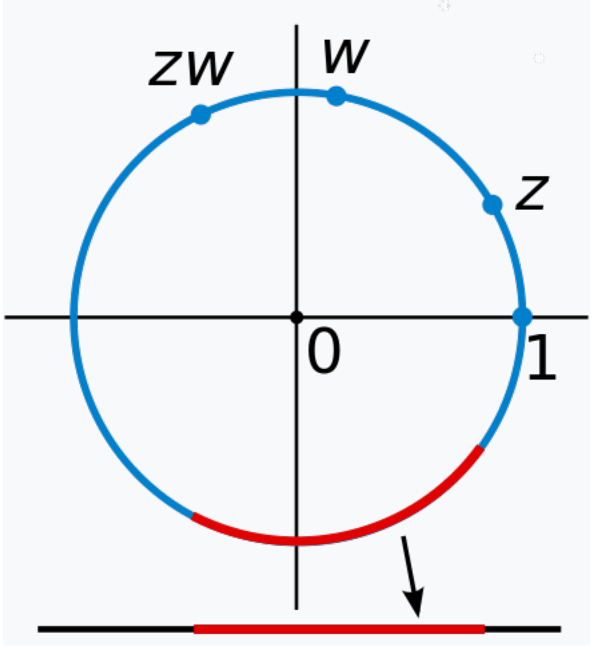
很多群同時是群和其他數學結構的例子。用范疇論的語言來說，它們是在范疇中的群對象，這意味著它們是帶著模仿群公理的（叫做態射的）變換的對象（就是說其他數學結構的例子）。例如，所有群（如上面定義的）也是一個集合，所以群是在集合范疇中的群對象。

拓撲群

某些拓撲空間可以配備上群結构。為了讓群公理與拓撲交織良好，群運算必須是連續函數，就是說如果g和h只變化很小，那么$g{\cdot}h$,和g^{-1}必須變化不大。這種群叫做拓撲群，并且它們是在拓撲空間范疇內的群對象。[65]最基本的例子是實數$\mathbf{R}$在加法之下$(\mathbf{R}\setminus\{0\},\cdot)$，任何其他拓撲域比如複數或p進數也是類似。所有這些群都是局部緊拓撲群，所以它們有哈尔测度并可以通過調和分析來研究。前者提供了不變積分的抽象形式化。以實數情况为例，不变性意味着有：

$$\int f(x)\,dx = \int f(x+c)\,dx$$

對於任何常數c成立。在這些域上的矩陣群也属于这种结构下，賦值向量環和賦值向量代數群也是如此，它們對數論是基礎性的。[66]無限域擴張的伽羅瓦群比如絕對伽羅瓦群也可以配備上拓撲，叫做Krull拓撲，它又是推廣上面概述的域和群的連接到無限域擴張的中心概念。[67]適應代數幾何需要的這個想法的高級推廣是étale基本群。[68]



在複平面中的單位圓在複數乘法下是李群，所以是拓撲群。它是拓撲的因為複數乘法和除法是連續的。它是流形并因此是李群，因為所有小段比如在圖中的紅色圓弧，看起來像（顯示在底下的）實數線的一部分。

李群

李群（为纪念索菲斯·李而命名）是具有流形結構的群，就是說它們是局部上看起來像某個適當維度的歐幾里得空間的空間。[69]這里，作為額外結構的流形結構也必須是兼容的，就是說對應於乘法和求逆的映射必須是光滑的。

標準例子是上面介紹的一般線性群：它是所有$n \times n$矩陣的空間的開子集，因為它由不等式

$$\det(A) \neq 0,$$

給出。這里的A指示$n \times n$矩陣。[70]

李群在物理中是基礎性的：诺特定理把連續對稱与守恒定律关联起来。[71]在空間和時間中旋轉和平移不變性是力學定律的基本對稱。它們可以被用來構造簡單的模型——比如在一種狀況下實施軸對稱常常會導致在解用來提供物理描述的方程上的重大簡化。v[›]另一個例子是洛伦兹变换，它有關於兩個相互運動的觀察者的時間和速度的測量。它們可以用純群論方式推演，通過把變換表達為闵可夫斯基時空的旋轉對稱。在忽略萬有引力的情況下，后者充當了狹義相對論的時空模型。[72]闵可夫斯基時空的完全對稱群，就是說包括了平移，叫做庞加莱群。通過上述联系，它在狹義相對論中扮演了關鍵角色，并隐含地用于量子場論。[73] 隨位置變化的對稱与規范場論一起构成现代物理对相互作用的描述的中心。[74]

推廣

在抽象代數中，通過放松定義群的某個公理可定義出更多的一般結構。[26][75][76]例如，如果省略所有元素都逆元的要求，結果的代數結構就叫做幺半群。自然數集$\mathbf{N}$（包括0）在加法下形成了幺半群，還有非零整數在乘法下$(\mathbf{Z}\setminus\{0\},\cdot)$也是。有一種一般方法用來向任何（阿貝爾的）幺半群正式的增加元素的逆元，非常類似于從$(\mathbf{Z}\setminus\{0\},\cdot)$得出$(\mathbf{Q}\setminus\{0\},\cdot)$的方式，這叫做格罗滕迪克群。广群非常類似于群，除了復合$a \cdot b$不必須在所有的a和b上有定義之外。它們由更加復雜形式的對稱的研究所引發，常見于拓撲和分析結構比如基本广群中。表格給出一些推廣群的結構。

類似群的結構				
	完全性	結合律	單位元	除法
群	是	是	是	是
幺半群	是	是	是	否
半群	是	是	否	否
環群	是	否	是	是
擬群	是	否	否	是
原群	是	否	否	否
廣群	否	是	是	是
范疇	否	是	是	否

參見

- 子群
- 群子集的乘積
- 正規子群
- 同构基本定理
- 有限群
- 中心化子和正規化子
- 拉格朗日定理
- 可解群
- 冪零群
- 舒尔正交关系

注釋

^ **a:** 《數學評論》列出了3,224篇2005年寫的關于群論和它的應用的研究論文。
^ **b:** 閉合公理已經由·是二元運算的條件所蘊含。因此有些作者省略這個公理。Lang 2002。
^ **c:** 比如參見Lang (2002, 2005)和Herstein (1996, 1975)的書。
^ **d:** 但是一個群不由它的子群的格所決定。參見Suzuki 1951。
^ **e:** 群運算的這么規范的擴展是泛性質的實例。
^ **f:** 例如，依據拉格朗日定理，如果G是有限的，則任何子群和任何商群的大小整除G的大小。
^ **g:** 詞同態演化自希臘語ὁμός—相同和μορφή—結構。
^ **h:** 循環群的加法符號是$t \cdot a$, $t \in \mathbf{Z}$。
^ **i:** 例子參見塞弗特- 范坎彭定理。
^ **j:** 一個例子是群的群上同調，它等于它的分類空間的單同調。
^ **k:** 有乘法逆元的元素叫做可逆元，參見Lang 2002，§II.1, p. 84。
^ **l:** 通過增加分數的從整數到有理數的轉變推廣為分式域。
^ **m:** 用任何域F替代$\mathbf{Q}$同樣是真的。參見Lang 2005，§III.1, p. 86。
^ **n:** 例如，域的乘法群的有限子群必然是循環群。參見Lang 2002，Theorem IV.1.9。模和單純代數的撓概念是這個原理的另一個實例。
^ **o:** 陳述的性質是素數的一個可能定義。參見素元。
^ **p:** 例如，迪菲-赫爾曼密鑰交換協議使用離散對數。
^ **q:** 阶不超过2000的群是已知的。这些群在同构意义下约有490亿个。参见Besche, Eick & O'Brien 2001.
^ **r:** 在单群和一般群分类之间的缺口在于扩张问题，一个很难一般性求解的问题。参见

Aschbacher 2004，p. 737.

^ **s:** 等价地说，一个非平凡群是单群当且仅当它仅有的商群是平凡群和自身。参见Michler 2006, Carter 1989.

^ **t:** 更嚴格的說，所有群都是某個圖的對稱群，參見Frucht 1939。

^ **u:** 更精確地說，monodromy作用在要考慮的微分方程的解的向量空間上。參見Kuga 1993，pp. 105–113。

^ **v:** 例如參見史瓦西度规，這里的對稱極大的減小了物理系統的復雜性。

^ **w:** 例如，這是有限簡單群的分類的關鍵。參見Aschbacher 2004。

^ **x:** 例如，群作用在單模上的效果的Schur引理。更加復雜的例子是絕對伽羅瓦群作用在平展上同调上。

^ **y:** 單射和滿射分別對應於單同態和滿同態。在傳給對偶范疇的時候它們是可互換的。

引文

1. Herstein 1975，§2, p. 26
2. Hall 1967，§1.1, p. 1:“群的想法遍布在包括純數學和應用數學二者的整個數學中。”
3. Herstein 1975，§2.1, p. 27
4. Lang 2005，App. 2, p. 360
5. Herstein 1975，§2.6, p. 54
6. Wussing 2007
7. Kleiner 1986
8. Smith 1906
9. Galois 1908
10. Kleiner 1986，p. 202
11. Cayley 1889
12. Wussing 2007，§III.2
13. Lie 1973
14. Kleiner 1986，p. 204
15. Wussing 2007，§I.3.4
16. Jordan 1870
17. von Dyck 1882
18. Curtis 2003
19. Mackey 1976.
20. Borel 2001
21. Aschbacher 2004
22. Ledermann 1953，§1.2, pp. 4—5
23. Ledermann 1973，§I.1, p. 3
24. Lang 2002，§I.2, p. 7
25. Lang 2005，§II.1, p. 17
26. Mac Lane 1998
27. Lang 2005，§II.3, p. 34
28. Lang 2005，§II.1, p. 19
29. Ledermann 1973，§II.12, p. 39
30. Lang 2005，§II.4, p. 41
31. Lang 2002，§I.2, p. 12
32. Lang 2005，§II.4, p. 45
33. Lang 2002，§I.2, p. 9
34. Hatcher 2002，Chapter I, p. 30
35. Coornaert, Delzant & Papadopoulos 1990
36. Neukirch 1999，特别是§§I.12和I.13

37. Seress 1997
38. Lang 2005, Chapter VII
39. Rosen 2000, p. 54 (Theorem 2.1)
40. Lang 2005, §VIII.1, p. 292
41. Lang 2005, §II.1, p. 22
42. Lang 2005, §II.2, p. 26
43. Lang 2005, §II.1, p. 22 (example 11)
44. Lang 2002, §I.5, p. 26, 29
45. Weyl 1952
46. Conway, Delgado Friedrichs & Huson et al. 2001.另见Bishop 1993
47. Bersuker, Isaac, The Jahn–Teller Effect, Cambridge University Press: 2, 2006, ISBN 0521822122
48. Jahn & Teller 1937
49. Dove, Martin T, Structure and Dynamics: an atomic view of materials, Oxford University Press: 265, 2003, ISBN 0198506783
50. Welsh 1989
51. Mumford, Fogarty & Kirwan 1994
52. Lay 2003
53. Kuipers 1999
54. Fulton & Harris 1991
55. Serre 1977
56. Rudin 1990
57. Robinson 1996, p. viii
58. Artin 1998
59. Lang 2002, Chapter VI (see in particular p. 273 for concrete examples)
60. Lang 2002, p. 292 (Theorem VI.7.2)
61. Kurzweil & Stellmacher 2004
62. Artin 1991, Theorem 6.1.14.另见Lang 2002, p. 77，其中包含类似结果。
63. Lang 2002, §I. 3, p. 22
64. Ronan 2007
65. Husain 1966
66. Neukirch 1999
67. Shatz 1972
68. Milne 1980
69. Warner 1983
70. Borel 1991
71. Goldstein 1980
72. Weinberg 1972
73. Naber 2003
74. Becchi 1997
75. Denecke & Wismath 2002
76. Romanowska & Smith 2002

引用

一般引用

- Artin, Michael, Algebra, Prentice Hall, 1991, ISBN 978-0-89871-510-1, Chapter 2 contains an undergraduatelevel exposition of the notions covered in this article.

- Devlin, Keith, The Language of Mathematics: Making the Invisible Visible, Owl Books, 2000, ISBN 978-0-8050-7254-9, Chapter 5 provides a layman-accessible explanation of groups.
- Dummit, David S.; Foote, Richard M., Abstract algebra 3rd, New York: Wiley, 2004, ISBN 978-0-471-43334-7, MR2286236.
- Fulton, William; Harris, Joe, Representation theory. A first course, Graduate Texts in Mathematics, Readings in Mathematics **129**, New York: Springer-Verlag, 1991, ISBN 978-0-387-97495-8, MR1153249, ISBN 978-0-387-97527-6
- Hall, G. G., Applied group theory, American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1967, MR0219593, an elementary introduction.
- Herstein, Israel Nathan, Abstract algebra 3rd, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall Inc., 1996, ISBN 978-0-13-374562-7, MR1375019.
- Herstein, Israel Nathan, Topics in algebra 2nd, Lexington, Mass.: Xerox College Publishing, 1975, MR0356988.
- Lang, Serge, Algebra, Graduate Texts in Mathematics **211**, Berlin, New York, 2002, ISBN 978-0-387-95385-4, MR1878556.
- Lang, Serge, Undergraduate Algebra 3rd, Berlin, New York: Springer-Verlag, 2005, ISBN 978-0-387-22025-3.
- Ledermann, Walter, Introduction to the theory of finite groups, Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1953, MR0054593.
- Ledermann, Walter, Introduction to group theory, New York: Barnes and Noble, 1973, OCLC 795613.
- Robinson, Derek John Scott, A course in the theory of groups, Berlin, New York: Springer-Verlag, 1996, ISBN 978-0-387-94461-6.
- 《代數學引論》第二版ISBN 7-04-008893-2聶靈沼、丁石孫著，高等教育出版社出版

專門引用

- Artin, Emil, Galois Theory, New York: Dover Publications, 1998, ISBN 978-0-486-62342-9.
- Aschbacher, Michael, The Status of the Classification of the Finite Simple Groups (PDF), Notices of the American Mathematical Society, 2004, **51** (7): 736–740, ISSN 0002-9920.
- Becchi, C., Introduction to Gauge Theories, 1997 [2008-05-15].
- Besche, Hans Ulrich; Eick, Bettina; O'Brien, E. A., The groups of order at most 2000, Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society, 2001, **7**: 1–4, doi:10.1090/S1079-6762-01-00087-7, MR1826989.
- Bishop, David H. L., Group theory and chemistry, New York: Dover Publications, 1993, ISBN 978-0-486-67355-4.
- Borel, Armand, Linear algebraic groups, Graduate Texts in Mathematics **126** 2nd, Berlin, New York: Springer-Verlag, 1991, ISBN 978-0-387-97370-8, MR1102012.
- Carter, Roger W., Simple groups of Lie type, New York: John Wiley & Sons, 1989, ISBN 978-0-471-50683-6.
- Conway, John Horton; Delgado Friedrichs, Olaf; Huson, Daniel H.; Thurston, William P., On three-dimensional space groups, Beiträge zur Algebra und Geometrie, 2001, **42** (2): 475–507, ISSN 0138-4821, MR1865535.
- （法文） Coornaert, M.; Delzant, T.; Papadopoulos, A., Géométrie et théorie des groupes [Geometry and Group Theory], Lecture Notes in Mathematics **1441**, Berlin, New York: Springer-Verlag, 1990, ISBN 978-3-540-52977-4, MR1075994.
- Denecke, Klaus; Wismath, Shelly L., Universal algebra and applications in theoretical computer science, London: CRC Press, 2002, ISBN 978-1-58488-254-1.
- Fröhlich, Albrecht, Formal groups, Lecture notes in mathematics **74**, Berlin, New York: Springer-Verlag, 1968.
- （德文） Frucht, R., Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe [Construction of Graphs with Prescribed Group], Compositio Mathematica, 1939, **6**: 239–50, ISSN 0010-437X, （原始内容存档于2008-12-01）.
- Goldstein, Herbert, Classical Mechanics 2nd, Reading, MA: Addison-Wesley Publishing: 588–596, 1980, ISBN 0-201-02918-9.
- Hatcher, Allen, Algebraic topology, Cambridge University Press, 2002, ISBN 978-0-521-79540-1.
- Husain, Taqdir, Introduction to Topological Groups, Philadelphia: W.B. Saunders Company, 1966, ISBN 978-0-

89874-193-3

- Jahn, H.; Teller, E., Stability of Polyatomic Molecules in Degenerate Electronic States. I. Orbital Degeneracy, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences (1934–1990), 1937, **161** (905): 220—235, doi:10.1098/rspa.1937.0142.
- Kassel, Christian, Quantum Groups, Springer, 1994, ISBN 978-0387943701.
- Kuipers, Jack B., Quaternions and rotation sequences – A primer with applications to orbits, aerospace, and virtual reality, Princeton University Press, 1999, ISBN 978-0-691-05872-6, MR1670862.
- Kuga, Michio, Galois' dream: group theory and differential equations, Boston, MA: Birkhäuser Boston, 1993, ISBN 978-0-8176-3688-3, MR1199112.
- Kurzweil, Hans; Stellmacher, Bernd, The theory of finite groups, Universitext, Berlin, New York: Springer-Verlag, 2004, ISBN 978-0-387-40510-0, MR2014408.
- Lay, David, Linear Algebra and Its Applications, Addison-Wesley, 2003, ISBN 978-0-201-70970-4.
- Mac Lane, Saunders, Categories for the Working Mathematician 2nd, Berlin, New York: Springer-Verlag, 1998, ISBN 978-0-387-98403-2.
- Michler, Gerhard, Theory of finite simple groups, Cambridge University Press, 2006, ISBN 978-0-521-86625-5.
- Milne, James S., Étale cohomology, Princeton University Press, 1980, ISBN 978-0-691-08238-7
- Mumford, David; Fogarty, J.; Kirwan, F., Geometric invariant theory **34** 3rd, Berlin, New York: Springer-Verlag, 1994, ISBN 978-3-540-56963-3, MR1304906.
- Naber, Gregory L., The geometry of Minkowski spacetime, New York: Dover Publications, 2003, ISBN 978-0-486-43235-9, MR2044239.
- Neukirch, Jürgen, Algebraic Number Theory, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **322**, Berlin: Springer-Verlag, 1999, ISBN 978-3-540-65399-8, MR1697859
- Romanowska, A.B.; Smith, J.D.H., Modes, World Scientific, 2002, ISBN 9789810249427.
- Ronan, Mark, Symmetry and the Monster: The Story of One of the Greatest Quests of Mathematics, Oxford University Press, 2007, ISBN 978-0-19-280723-6.
- Rosen, Kenneth H., Elementary number theory and its applications 4th, Addison-Wesley, 2000, ISBN 978-0-201-87073-2, MR1739433.
- Rudin, Walter, Fourier Analysis on Groups, Wiley Classics, Wiley-Blackwell, 1990, ISBN 047152364X.
- Seress, Ákos, An introduction to computational group theory, Notices of the American Mathematical Society, 1997, **44** (6): 671—679, ISSN 0002-9920, MR1452069, （原始内容存档于2007-02-08）.
- Serre, Jean-Pierre, Linear representations of finite groups, Berlin, New York: Springer-Verlag, 1977, ISBN 978-0-387-90190-9, MR0450380.
- Shatz, Stephen S., Profinite groups, arithmetic, and geometry, Princeton University Press, 1972, ISBN 978-0-691-08017-8, MR0347778
- Suzuki, Michio, On the lattice of subgroups of finite groups, Transactions of the American Mathematical Society, 1951, **70** (2): 345—371, doi:10.2307/1990375.
- Warner, Frank, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Berlin, New York: Springer-Verlag, 1983, ISBN 978-0-387-90894-6.
- Weinberg, Steven, Gravitation and Cosmology, New York: John Wiley & Sons, 1972, ISBN 0-471-92567-5.
- Welsh, Dominic, Codes and cryptography, Oxford: Clarendon Press, 1989, ISBN 978-0-19-853287-3.
- Weyl, Hermann, Symmetry, Princeton University Press, 1952, ISBN 978-0-691-02374-8.

歷史引用

- Borel, Armand, Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups, Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2001, ISBN 978-0-8218-0288-5
- Cayley, Arthur, The collected mathematical papers of Arthur Cayley, II (1851 – 1860), Cambridge University Press, 1889.
- Curtis, Charles W., Pioneers of Representation Theory: Frobenius, Burnside, Schur, and Brauer, History of Mathematics, Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2003, ISBN 978-0-8218-2677-5.

- （德文） von Dyck, Walther, Gruppentheoretische Studien Group-theoretical Studies (subscription required), Mathematische Annalen, 1882, **20** (1): 1—44, ISSN 0025-5831, doi:10.1007/BF01443322.
- （法文） Galois, Évariste, Tannery, Jules, 编, Manuscrits de Évariste Galois [Évariste Galois' Manuscripts], Paris: Gauthier-Villars, 1908 (Galois work was first published by Joseph Liouville in 1843).
- （法文） Jordan, Camille, Traité des substitutions et des équations algébriques [Study of Substitutions and Algebraic Equations], Paris: Gauthier-Villars, 1870.
- Kleiner, Israel, The evolution of group theory: a brief survey (subscription required), Mathematics Magazine, 1986, **59** (4): 195—215, ISSN 0025-570X, MR863090.
- （德文） Lie, Sophus, Gesammelte Abhandlungen. Band 1 [Collected papers. Volume 1], New York: Johnson Reprint Corp., 1973, MR0392459.
- Mackey, George Whitelaw, The theory of unitary group representations, University of Chicago Press, 1976, MR0396826
- Smith, David Eugene, History of Modern Mathematics, Mathematical Monographs, No. 1, 1906.
- Wussing, Hans, The Genesis of the Abstract Group Concept: A Contribution to the History of the Origin of Abstract Group Theory, New York: Dover Publications, 2007, ISBN 978-0-486-45868-7.

外部連結

- 埃里克·韦斯坦因. Group. MathWorld.
- Group (http://planetmath.org/encyclopedia/Group.html) at PlanetMath.
- The development of group theory (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Development_group_theory.html) at *The MacTutor History of Mathematics archive*.